NMAB09: Matematikens historia, projekt om kinesisk och indisk matematik

av Per Erik Strandberg* och Jonas Dartman†

3 mars 2004

Om denna text

Denna rapport är ett projekt i kursen NMAB09, Matematikens historia, 3p, LiTH. Den behandlar väl valda historiskt intressanta delar av matematikens historia vars ursprung kan anses vara kinesisk, indisk eller hinduisk. Författarna har inte syftet att vara heltäckande.

Inom den kinesiska matematikhistorien berörs de tekniska hjälpmedlen kulram och räknebräde, samt moduloräkning och matrisoperationer. Några indiska delar som behandlas är decimalsystemet, samt verk och matematiker.

Innehåll

*epost: perst586@student.liu.se .
†epost: jonan576@student.liu.se .

1 Indisk matematik

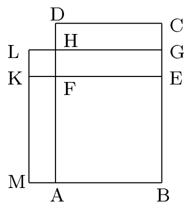
1.1 Decimalsystemet

Ur matematisk synvinkel var decimalsystemet indiernas viktigaste bidrag till världens vetande. Det fulländades av tre uppfinningar; användandet av speciella talsymboler utan anknytning till externa talsymboler som alfabetet eller bilder av fingrar och tår; användandet av ett positions- eller platsvärdessystem (tecknets värde är beroende av om det är placerat på entals-, tiotals- eller hundratalsplatsen i talsymboliken); samt, viktigast av allt, användandet av ett tecken för noll för att ange att platsen inte fogar något till talet [1].

1.2 Ursprung och Sulvasutra

Från ca 800-500 f. Kr. fanns i Indien en skriftserie om sju "Sulvasutra", uppkallade efter lärda män som utarbetat den. Skrifterna innehåller geometriska konstruktioner som är förknippade med utformningen av olika altare.

Ett exempel är hur man förvandlar en godtycklig rektangel, ABCD, till en kvadrat med samma area, med hjälp av Pythagoras sats:



Avsätt de kortare sidorna på de längre så att AF=AB=BE=CD, och dra HG som halverar sträckorna CE och DF. Dra ut EF till K, GH till L och AB till M så att FK=HL=AM=FH, och dra linjen KLM. Konstruera nu en rektangel med den kortare sidan HF och diagonalen LG. Den långa sidan är då den sökta kvadratens sida. Detta kan alltså genomföras med hjälp av endast ett rep! [2]

Att detta fungerar ser vi om vi undersöker MBGHFK, ett så kallat gnomon som har samma area som den ursprungliga rektangeln ABCD. Betraktar vi nu kvadraterna MBGL och KFHL så är den sökta kvadraten skillnaden dem emellan, här används alltså Pythagoras sats: $(sökt)^2 = (MB)^2 - (KF)^2$. [3]

Verken innehåller även pythagoreiska tripplar, exempelvis (3, 4, 5), (7, 24, 25) och (12, 35, 37). Där fanns också ett sätt att ta fram diagonalen d i en kvadrat med sidan a. (d motsvarar alltså $\sqrt{2}$ om a är ett.) [4]

$$d = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{34}$$

1.3 De tre stora

De tre mest kända forntida indiska matematikerna var Aryabhata (född 476), Brahmagupta (född 598) och Bhaskara (född 1114). Aryabhata visade bland annat på en metod för lösning av obestämda förstagradsekvationer som brukar kallas kuttaka, "pulveriseraren". Namnet anspelar på föreställningen att man när man arbetar med två tal slår och gnuggar dem mot varandra tills de malts ned till pulver, för att sedan foga samman bitarna igen och få lösningen till det ursprungliga problemet [1].

Aryabhata angav π enligt följande: "Lägg fyra till hundra, multiplicera med åtta, lägg till 62 000. Resultatet är ungefärligen omkretsen av en cirkel med diametern 20 000."

Det är hos Aryabhata decimalsystemet dyker upp för första gången; "från plats till plats är varje tio gånger större än det förra" [2]. Aryabhata tabulerade sinusfunktionen (halva kordan som funktion av halva medelpunktsvinkeln), han använde dock inte värdet ett på cirkelns radie utan i stället 3438, som multiplicerat med hans värde på π är $360 \cdot 60$, den omkrets han ville ha. [5]

Brahmagupta var den första som systematiskt behandlade de negativa talen och talet noll, han formulerade bland annat slutgiltiga regler för multiplikation och division med noll. Han betraktade noll som ett tal, inte bara som en tom plats i talet [1]. Han hade dock inte allt klart för sig då han hävdade att:

"Positiv delat med positiv, eller negativ med negativ, är positiv. Noll genom noll är noll. Positiv genom negativ är negativ. Negativ genom positiv är negativ. Positiv eller negativ delat med noll är en bråkdel av nämnaren" [6]

Brahmagupta gav den generella lösningen till den obestämda förstagradsekvationen $ax + by = c$ till $x = p + mb$ och $y = q - ma$ där p och q är en heltalig lösning, om största gemensamma delaren till a och b delar c, och a och b är relativt prima. Olika värden på m ger en serie värden som x och y antar. Han efterlyste vidare lösningar av den obestämda heltalsekvationen $x^2 - p \cdot y^2 = 1$ [5]. Det tog runt femhundra år innan Bhaskara kom med lösningar för de fem fallen $p = 8$, 11, 32, 61 och 67. För $p = 61$ gav Bhaskara lösningen $x = 1766319049$ och $y = 226153980$, en riktig utmaning att ge sig på med papper och penna! [2]

1.4 Matematikens pärla

Bhaskara författade "Siddhanta Siromani" eller "Matematikens pärla". Boken är uppdelad i fyra delar: Lilavanti (om aritmetik), Bijahanita (algebra), Goladhaya (om himmelssfären) och Grahaganita (om planeterna). Den första delen är skriven i en intagande stil, där ett exempel på ett problem lyder:

"Min käraste flicka, tio gånger kvadratroten av antalet svanar i en viss sjö flög sin väg till Manasa Sarovar när regnen kom med monsunen. En åttondel begav sig till den skog som kallas Sthala Padami. Tre svanpar stannade kvar i sjön upptagna av kärlekslekar. Hur många svanar var det allt som allt?"[1]

Detta sätt att framställa problemet fångade säkert elevens intresse samtidigt som hon övades i att urskilja vad som är relevant. [1]

1.5 Gelosiamultiplikation

Redan på 1100-talet kände man i Indien till ett sätt att multiplicera tal som kom att kallas gelosia. Från Indien tog sig metoden vidare till Kina och Arabien, och därifrån till Italien där den kom på 1300- och 1400-talet, och fick där sitt namn eftersom uppställningen liknade de persienner man hade framför fönster framför allt i Venedig [2]. Jämför här gärna med orden "jalusi" respektive "Venetian blind".

[1] Rätt antal är 144 st.

		5		6		7	
		5		0		5	
5	2		3		3		5
		0		4		8	
4	2		2		2		1
		2		5		5	

Metoden går i korthet till som följer: Skriv det ena talet (567) från vänster till höger ovanför rutorna, och det andra talet (45) nedifrån och upp till vänster om rutorna. Multiplicera därefter ruta för ruta, skriv resultatet nedifrån och upp. Addera sedan diagonalerna med början i det övre högra hörnet. Resultatet kan nu läsas från vänster till höger under rutorna, med fortsättning till höger om rutorna, nedifrån och upp.

2 Kinesisk matematik

2.1 Allmänt

Kina har i den tidiga historien bidragit med många stora uppfinningar som kompassen, pappret, boktryckarkonsten, och krutet. Även inom matematikens område i Kina gjordes stora upptäckter. Några av orsakerna till mängden producerat material var åsikten att räkning inte är slavgöra utan något som bör göras av begåvade då abstrakt tänkande kan lösa till exempel skatte- och lantmäteriproblem. På detta sätt utgör matematik något som är bra för staten och som därför kan ge ordning i världsalltet. Även språket kan ha en bidragande orsak, något som gjorde att man i princip hade samma system i matematik i cirka 2000 år.

Gällande tidpunkter och verk så bör det nämnas att osäkerheten i kronologin är stor, något som kan bero på att den tyranniske Qinkejsaren år 213 f.Kr. lät bränna många böcker. Ett känt verk: “Chou Pei Suan Ching” - som behandlar främst astronomisk matematik, även rätvinkliga trianglar och fraktioner - dateras mellan 1200 f.Kr. och 300 f.Kr. Ett annat verk som har påverkat eftervärlden mer är “Chiu-chang suan-shu” eller “Nio kapitel om den matematiska konsten” med innehåll från omkring 250 f.Kr. Den innehåller 246 lösta problem inom områdena lantmäteri, skatteberäkning, enkla ekvationer, rätvinkliga trianglar och obestämda ekvationer. Framställningen är av problem-lösning-typ och denna presentationsform levde sedan kvar länge.

Sannolikt är “Nio kapitel. . . ” ett kollektivt arbete som sedan kompilerats ihop i ett verk och redan år 263, när Liu Hui kommenterade “Nio kapitel. . . ” var det okänt vem som skrev den. Som svar på linjära ekvationsystem dyker både positiva och negativa rötter upp, men för högre graders ekvationer nöjer man sig ofta med en rot.

Man kunde använda Pascals triangel senast på 1100-talet och en berömd bild av den finns bevarad i tryck från omkring 1303. [1, 8]

2.2 Kinesiska restsatsen och moduloaritmetik

Med begreppet modulo menas hur stor rest som fås från ett tal a om vi delar med ett annat tal b. Till exempel $14 \equiv 2 \pmod 3$, det vill säga: fjorton är kongruent med två modulo tre, då 14 delat med 3 ger 4 hela och 2 i rest.

För att dels demonstrera moduloaritmetiken och visa hur jordnära och nödvändig matematiken är tar vi följande exempel.

Tre bröder (A, B och C) delar en risskörd i tre lika delar för att sälja på tre olika marknader. På marknaden A går till säljs ris i enheter om tre och A får två enheter över. På marknaden där B säljer ris mäts ris i enheter om fem och B får tre enheter över, C får två över efter att ha sålt i enheter om 7. De resterande enheterna säljs i hemmabyn.

Nu kommer en statstjänsteman som vill ha in skatt och undrar hur mycket ris de sålt varpå bröderna svarar 804, de påstår alltså att de har sålt 268 enheter var.

Självklart ljuger de, men hur kan statstjänstemannen bevisa det? Här kommer kinesiska restsatsen (känd sedan 100-talet) in och räddar dagen. Den kinesiska restsatsen säger att det till varje mängd divisor-rest-par finns ett tal som satisfierar dem. Exempelvis satisfieras $N \equiv 2 \pmod 5$, $N \equiv 6 \pmod 7$ och $N \equiv 3 \pmod 4$ av $N = 27$, men även $N = 27 + m \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 = 27 + m \cdot 140$ (m heltal).

För att finna det minsta av dessa tal finns en algoritm som går ut på att till resten addera divisorn upprepade gånger tills man finner lämpligt tal. I tabellen nedan illustreras principen.

Broder	A	B	C
Divisor	3	5	7
Rest	2	3	2
Till att börja med	2	3	2
Resten plus 1·divisor	5	8	9
Resten plus 2·divisor	8	13	16
Resten plus 3·divisor	11	18	23
Resten plus 4·divisor	14	23	-
Resten plus 5·divisor	17	-	-
Resten plus 6·divisor	20	-	-
Resten plus 7·divisor	23	-	-

Vi ser alltså att det minsta talet skulle vara 23, men 23 är mycket mindre än de 268 enheter du skulle ha sålt var. Vi adderar $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ och får talen 128, 233 och 338 när vi passerar 268 som bröderna angav. Då de sannolikt inte ljög till sin egen nackdel kan vi anta att de åtminstonde hade en skörd på $348 \cdot 3 = 1044$. [1]

2.3 Tekniska hjälpmedel

Två verktyg som härstammar från Kina är abakusen och räknebrädet. Abakusen i Kina, till skillnad från den som förekom i muslimska länder, består av kolonner med fem entalskulor och två femtalskulor för att representera tal med tio som bas.

Det stora underverket var dock räknebrädet. En samling kvadratiska hål i en schackbrädeliknande anordning vari stickor stoppas för att representera siffror. Flera siffror från 0-9 i hål i rad ger då tal på samma sätt som vi skriver heltal. Omkring 400 f.Kr. användes nollan som en tom plats på räknebrädet. Decimalbråk dyker upp i skrift ca 260. Nollan som siffra kom i bruk på 700-talet.

Inte bara det att nollan har en naturlig plats, negativa tal ges i princip samma vikt som de positiva då man för att representera tal använder sig av två uppsättningar stickor: röda för positiva och svarta för negativa. Med dessa hjälpmedel kunde man utföra tunga beräkningar mycket snabbt och mekaniskt. [1, 7, 8, 9]

2.4 Matrisoperationer

Kombinatorisk fixering av till exempel magiska kvadrater som $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ där alla rader, kolonner och diagonaler adderar ihop till 15 var något man gillade i Kina. Man kan lätt föreställa sig denna magiska kvadrat som pinnar i en räknebräde, och att man på detta sätt kunde representera ekvationssystem som lätt löstes.

Ekvationssystem kunde snabbt och enkelt lösas med Gauss-elimination. Ekvationssystemet: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$ skrevs som $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$ och reducerades till $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$ som gav: $\begin{cases} 36z = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$ som ger x, y, z. [2]

Referenser

[1] John McLeish, (1991), *Matematikens kulturhistoria*, Bokförlaget Forum AB, Falun.

[2] Carl B. Boyer, (1968), *A history of mathematics*, Princeton University Press, Princeton.

[3] Jan Thompson, (1991), *Historiens matematik*, Studentlitteratur, Lund.

[4] I. Grattan-Guinnes (redaktör), (1994), *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences, volume I*, Routledge, London.

[5] Boris Sjöberg, (2001), *Från Euklides till Hilbert*, Åbo Akademis Förlag, Åbo.

[6] H.T. Colebrook, (1817), *Algebra, with arithmetic and mensurion, from the sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara.*

[7] Lancelot Hogben, (1962), *Matematikens vägar*, Bokförlaget Forum AB, Amsterdam.

[8] Li Yan, Du Shiran, (1987), *Chinese mathematics, a concise history*, Clavender Press, Oxford.

[9] Tord Hall, (1970), *Matematikens utveckling*, Gleerups, Lund.